Applications du produit scalaire

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

I. Rappels sur les équations de droites

Voir les 2 cartes mentales de rappels de 2nde sur http://urbanmathproject.free.fr/documents.php#Classe_de_1ere

Critère de colinéarité :
$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Vecteur directeur d'une droite :
Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}(-b\,;a)$.

Propriété :
Les droites d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Réactivation des connaissances :

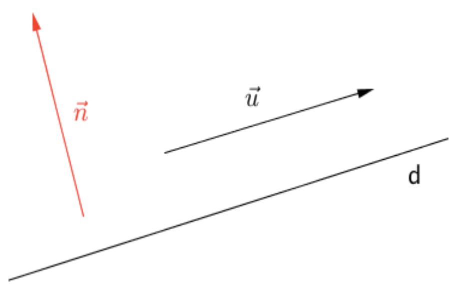
- Exercices corrigés 1 à 5 de https://www.annales2maths.com/2nd-exercices-corriges-vecteurs-colinearite/
- Déterminer une équation cartésienne de droite à partir de :
  - 1 point + 1 vecteur directeur : https://youtu.be/NosYmlLLFB4
  - 2 points : https://youtu.be/i5WD8IZdEqk

Remarque : équation cartésienne ≠ équation réduite

Exemple : soit *d* d'équation cartésienne $4x + y - 6 = 0$. Elle est de la forme $ax + by + c = 0$
Son équation réduite est $y = -4x + 6$.

II. Vecteur normal

Définition : Soit une droite *d*.
On appelle **vecteur normal** à une droite *d*, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de *d*.



Exemple :
Soit la droite *d* d'équation cartésienne $2x - 3y - 6 = 0$. Un vecteur directeur de *d* est : $\vec{u}(3\,;2)$.
Un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ de *d* est tel que : $\vec{u}.\vec{n} = 0$
Soit : $3a + 2b = 0$.
a = 2 et b = -3 conviennent, ainsi le vecteur $\vec{n}(2\,;-3)$ est un vecteur normal de *d*.

<u>Propriétés</u> :

- Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
- Réciproquement, la droite *d* d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ pour vecteur normal.

Il faut savoir :

- Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère la droite *d* passant par le point $A(-5\,;4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(3\,;-1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite *d*.

Comme $\vec{n}(3\,;-1)$ est un vecteur normal de *d*, une équation cartésienne de *d* est de la forme $3x - y + c = 0$
Le point $A(-5\,;4)$ appartient à la droite *d*, donc : $3 \times (-5) - 4 + c = 0$ et donc : $c = 19$.
Une équation cartésienne de *d* est : $3x - y + 19 = 0$.

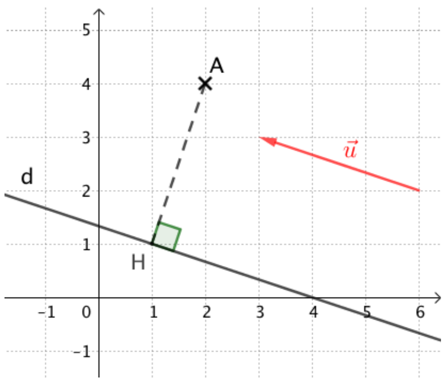
Revoir l'explication et la rédaction en vidéo à la maison sereinement ici :
https://youtu.be/oR5QoWCiDIo

- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite :

Soit la droite *d* d'équation $x + 3y - 4 = 0$ et le point A de coordonnées (2 ; 4).
Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la droite *d*.

Rédigez vos calculs sur feuille.

Aide : https://youtu.be/-HNUbyU72Pc



Exercices : n° 70, 69 et 73 page 248

III. Équations de cercle

<u>Propriété</u> : Une équation du cercle de centre $A(a\,;\ b)$ et de rayon r est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

<u>Éléments de démonstration</u> :
Tout point $M(x\,;y)$ appartient au cercle de centre $A(a\,;\ b)$ et de rayon r si et seulement $AM^2 = r^2$.

Il faut savoir :

- Déterminer l'équation d'un cercle

  Exemple :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(4\,;-1)$ et passant par le point $B(3\,;5)$.
Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.

- Déterminer les caractéristiques d'un cercle

Exemple :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère l'ensemble E d'équation :
$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$. Démontrer que l'ensemble E est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).